Padrão de resposta: Prova de seleção de Mestrado (PPGMAT-UFAL 2021.2)

1. Existe uma sequência $\{x_n\}$ de números reais com $x_n \geq \delta > 0$ natural e $x_{n+1} \leq \dfrac{x_n}{1+x_n}$ para todo n natural? Justifique precisamente a sua resposta.

   Solução: Assuma que exista uma tal sequência $\{x_n\}$ de números reais com $x_n \geq \delta > 0$ e $x_{n+1} \leq \dfrac{x_n}{1+x_n}$ para todo n natural. Então $1 + x_n \geq 1 + \delta$, o que implica $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{1+\delta}$. Daí $\frac{x_{n+1}}{x_n}\frac{x_n}{x_{n-1}} \cdots \frac{x_2}{x_1} \leq (\frac{1}{1+\delta})^n$, isto é, $x_{n+1} \leq (\frac{1}{1+\delta})^n x_1$. Portanto, como $(\frac{1}{1+\delta})^n x_1$ tende a zero quando $n \to +\infty$, existe n grande, tal que $x_{n+1} < \delta$. Um absurdo, logo não existe tal sequência.

2. Prove que a série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^2}$$

   é convergente.

   Solução: Chame $a_n = \dfrac{1}{n(\log n)^2}$. Veja que a_n é decrescente e $\lim_n a_n = 0$. Sob estas hipóteses, sabemos que $\sum_n a_n$ converge se e só se $\sum 2^n a_{2^n}$ converge. Por outro lado, $2^n a_{2^n} = \dfrac{2^n}{2^n(n\log 2)^2} = \dfrac{1}{(\log 2)^2 \cdot n^2}$. Portanto,

$$\sum_n 2^n a_{2^n} = \frac{1}{(\log 2)^2} \cdot \sum_n \frac{1}{n^2}$$

   que é convergente. Logo, $\sum_n a_n = \sum_n \dfrac{1}{n(\log n)^2}$ é convergente.

3. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e seja $c \in D$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

   - f é contínua em c.
   - Se $\{x_n\}$ é sequência em D tal que $\{x_n\}$ converge para c, então a sequência $\{f(x_n)\}$ converge para $f(c)$.

   Solução: 1. Suponha que $\{x_n\}$ é uma sequencia tal que $\lim x_n = c$ então para todo $\delta > 0$ existe um N tal que se $n \geq N$ então $|x_n - c| < \delta$. Como f é contínua, dado $\varepsilon > 0$ escolha um $\delta > 0$ tal se $|x - c| < \delta$ então $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Logo existe um N_δ tal que se $n \geq N$ então $|x_n - c| < \delta$ e daí $|f(x_n) - f(c)| < \varepsilon$, ou seja, $\lim f(x_n) = f(c)$.
   2. Suponha, por absurdo, que vale a segunda afirmação (f sequencialmente contínua em c) mas f não seja contínua em c. Então existe uma vizinhança V de $f(c)$ tal que nenhuma vizinhança U de c é tal que $f(U) \subset V$. Seja $U_n = \{x \in D : |x - c| < \frac{1}{n}\}$, para $n \geq 1$. Em particular $f(U_n) \cap V^c = \emptyset$. Para cada n, escolha $x_n \in U_n$ temos que $\lim x_n = c$, mas $\{f(x_n)\}$ não converge a $f(c)$ por construção.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Assuma que para quaisquer $x, t \in \mathbb{R}$, temos:

$$|f(x) - f(t)| \leq |t - x|^\alpha$$

onde $\alpha > 1$. Mostre que $f(x)$ é constante.

Solução: Usando a hipótese, obtemos $\frac{f(x)-f(t)}{t-x} = \frac{|f(x)-f(t)|}{|t-x|} \leq |t-x|^{1-\alpha}$, para quaisquer $t \neq x$. Fazendo t tender a x, temos que $f'(x) = 0$ para qualquer x arbitrário dado. Portanto f é constante.

5. Determine se a seguinte sentença é verdadeira ou falsa, justificando precisamente a sua afirmação.

   "Se f e g são funções integráveis de uma variável real, definida no intervalo compacto $[0, 1]$ tais que o conjunto $X = \{x \in [0, 1]; f(x) \neq g(x)\}$ tem medida nula e f é integrável, então g também é integrável."

   Solução: Por hipótese a função g é integrável.